Correction_TDs_Electrocinétique_Série 2

Exercice 1 :

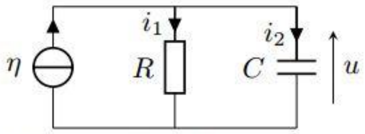
a) $Cu = -q$, $i = \dfrac{dq}{dt} = -C\dfrac{du}{dt}$, et $u = \dfrac{-q}{C} = +L\dfrac{di}{dt} = L\dfrac{d^2q}{dt^2}$

b) $Cu = q$, $i = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{du}{dt}$, et $u = \dfrac{q}{C} = -L\dfrac{di}{dt} = -L\dfrac{d^2q}{dt^2}$

c) $Cu = -q$, $i = \dfrac{-dq}{dt} = C\dfrac{du}{dt}$, et $u = \dfrac{-q}{C} = -L\dfrac{di}{dt} = L\dfrac{d^2q}{dt^2}$

d) $Cu = q$, $i = \dfrac{-dq}{dt} = -C\dfrac{du}{dt}$, et $u = \dfrac{q}{C} = L\dfrac{di}{dt} = -L\dfrac{d^2q}{dt^2}$

Exercice 2 :



Équation différentielle vérifiée par u. D'après la loi des nœuds,

$$I_0 = i_1 + i_2$$

D'après les lois de comportement, et comme R et C sont montés en parallèle,

$$I_0 = \frac{u}{R} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,.$$

On a alors l'équation différentielle cherchée, qu'on écrit sous forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{I_0}{C} \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC\,.}$$

Forme générale des solutions.

▷ Solution particulière. Comme le forçage I_0 est constant, alors la solution particulière U_∞, qui décrit le régime permanent, est constante également. D'après l'équation différentielle,

$$0 + \frac{1}{\tau}U_\infty = \frac{I_0}{C} \qquad \text{d'où} \qquad U_\infty = \frac{I_0\tau}{C} \qquad \text{soit} \qquad U_\infty = RI_0$$

Forme générale des solutions.

▷ Solution particulière. Comme le forçage I_0 est constant, alors la solution particulière U_∞, qui décrit le régime permanent, est constante également. D'après l'équation différentielle,

$$0 + \frac{1}{\tau}U_\infty = \frac{I_0}{C} \qquad \text{d'où} \qquad U_\infty = \frac{I_0\tau}{C} \qquad \text{soit} \qquad U_\infty = RI_0$$

On vérifie que c'est cohérent avec l'analyse par circuits équivalents : en régime continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, donc $i_2 = 0$ et $i_1 = I_0$, d'où $U_\infty = RI_0$.

▷ Solution homogène : $u_{\mathrm{H}}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

▷ Finalement, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$u(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + RI_0\,.$$

Condition initiale. Raisonnons d'abord sur le circuit équivalent à $t = 0^-$: comme $\eta(0^-) = 0$ alors $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0$, et d'après la loi d'Ohm

$$u(0^-) = Ri_1(0^-) = 0\,.$$

Comme u est également la tension aux bornes d'un condensateur, alors elle est forcément continue, donc

$$u(0^+) = u(0^-) = 0\,.$$

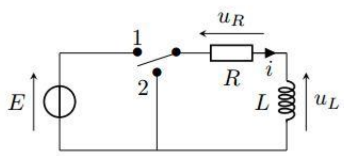
Constante d'intégration.

$$u(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A + RI_0 \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \qquad \text{donc} \qquad A = -RI_0$$

Conclusion

$$\boxed{u(t) = RI_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) .}$$

Exercice 3 :



$\boxed{1}$ Commençons par établir l'équation différentielle vérifiée par i à $t > 0$, c'est-à-dire lorsque l'interrupteur est sur la position 2. D'après la loi des mailles,

$$u_R + u_L = 0\,.$$

En utilisant les lois de comportement (dipôles en convention récepteur),

$$R\,i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

ce qui s'écrit sous forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,i = 0 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{L}{R} = 1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}\,.}$$

$\boxed{2}$ Compte tenu de la valeur de τ, **le régime permanent ne sera atteint ni au bout de 10 µs, ni de 200 µs** (2τ n'est pas suffisant, il faut au moins 5τ). En revanche **il le sera au bout de 20 ms.**

$\boxed{3}$ **Forme générale des solutions :** Cette équation différentielle est homogène. Ses solutions s'écrivent sous la forme

$$i(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,,$$

où A se détermine à partir des conditions initiales.

Condition initiale : Cherchons $i(0^+)$. À l'instant $t = 0^-$, l'interrupteur est en position 1 et le régime est permanent continu. Comme la bobine est équivalente à un fil, le circuit est équivalent à une résistance R branché au générateur de f.é.m. E. D'après la loi d'Ohm, le courant dans le circuit vaut

$$i(0^-) = \frac{E}{R}\,.$$

Comme le courant dans une bobine doit être continu, on en déduit $i(0^+) = E/R$ également.

Détermination de la constante d'intégration : D'après la forme générale de la solution, $i(0^+) = A\,\mathrm{e}^{-0/\tau}$, et par identification avec la condition initiale on déduit $A = E/R$. Finalement,

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.}$$

$\boxed{4}$ À l'instant initial, $i = E/R$, et l'énergie stockée dans la bobine vaut

$$\mathcal{E}_L(0) = \frac{1}{2}\,L\,i^2 = \frac{1}{2}\,L\,\frac{E^2}{R^2}\,.$$

À l'instant final, $i = 0$ (se voit ou bien en considérant le circuit équivalent en régime permanent, ou bien en prenant la solution dans la limite $t \to \infty$), donc

$$\mathcal{E}_L(\infty) = 0\,.$$

Ainsi, la variation d'énergie dans la bobine vaut

$$\Delta\mathcal{E}_L = \mathcal{E}_L(\infty) - \mathcal{E}_L(0) = -\frac{L\,E^2}{2\,R^2}$$

L'énergie dissipée dans la résistance entre $t = 0$ et la fin de l'évolution vaut

$$Q_\mathrm{J} = \int_0^\infty P_\mathrm{J}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty R\,i(t)^2\,\mathrm{d}t\,.$$

où P_J est la puissance dissipée par effet Joule à l'instant t. En utilisant l'expression de $i(t)$ établie précédemment,

$$Q_\mathrm{J} = \int_0^\infty R\,\frac{E^2}{R^2}\,\mathrm{e}^{-2t/\tau}\,\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t/\tau}\,\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}\,\mathrm{e}^{-2t/\tau}\right]_0^\infty = \frac{E^2\tau}{2R}$$

Comme $\tau = L/R$, on en déduit

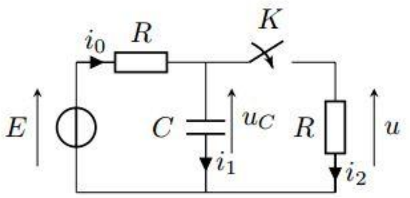
$$\boxed{Q_\mathrm{J} = \frac{L\,E^2}{2\,R^2} = -\Delta\mathcal{E}_L\,.}$$

Ce bilan traduit bien que l'énergie libérée par la bobine est dissipée par effet Joule dans la résistance.

Exercice 4 :

Trouver l'expression de u passe forcément par l'obtention d'une équation différentielle et sa résolution. La méthode étant très systématique, un exercice plus guidé que celui-là est rare. On note $t = 0$ l'instant de fermeture de l'interrupteur K.

$\boxed{1}$ Obtention de l'équation différentielle :



Commençons par établir l'équation différentielle vérifiée par u pour $t > 0$, où l'interrupteur est fermé. Comme le circuit compte deux mailles, il faudra utiliser deux lois de Kirchoff, mais l'ordre dans lequel on les utilise importe peu. D'après la loi des mailles et la loi d'Ohm,

$$E = R\,i_0 + u\,.$$

D'après la loi des nœuds,

$$i_0 = i_1 + i_2 = i_0 + \frac{u}{R}$$

Ainsi,

$$E = (R\,i_1 + u) + u\,.$$

En utilisant la loi de comportement du condensateur et le fait qu'à $t > 0$, $u_C = u$ on en déduit l'équation différentielle vérifiée par $u(t > 0)$.

$$\boxed{E = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2u \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{2\tau} \quad \text{avec } \tau = \frac{RC}{2}\,.}$$

$\boxed{2}$ Forme générale des solutions :

La forme générale d'une solution de cette équation différentielle est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Toute solution de l'équation homogène s'écrit sous la forme

$$u_\mathrm{h}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,,$$

avec A une constante. Pour trouver une solution particulière, on la cherche de même forme que le forçage E qui est constant. On voit sur l'équation différentielle que la fonction constante

$$u_\mathrm{p}(t) = \frac{E}{2}\,.$$

convient, et on peut vérifier par équivalence de circuits que u_p correspond bien au régime permanent asymptotique (dans cette limite, on a un diviseur de tension). Ainsi, toute solution de l'équation différentielle complète s'écrit

$$u(t) = u_\mathrm{h}(t) + u_\mathrm{p}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{E}{2}\,.$$

où A est une constante. Trouver *la* solution au problème physique qui nous intéresse consiste à trouver A, ce qui se fait par l'intermédiaire d'une condition initiale $u(0^+)$.

$\boxed{3}$ Détermination d'une condition initiale :

Comme, pour $t > 0$, $u_C = u$ alors à l'instant initial $u(0^+) = u_C(0^+)$. Par conséquent, $u(0^+) = u_C(0^-)$ car la tension aux bornes d'un condensateur est continue. Mais attention : $u(0^+) \neq u(0^-)$ car la tension aux bornes d'un interrupteur ouvert n'est pas nulle ! Déterminons donc $u_C(0^-)$. Remarquons pour cela qu'à $t < 0$, $i_1 = 0$ (condensateur équivalent à un interrupteur ouvert) et $i_2 = 0$ (vrai interrupteur ouvert), et donc d'après la loi des nœuds $i_0 = i_1 + i_2 = 0$. La loi des mailles s'écrit alors à $t = 0^-$

$$E = 0 + u_C(0^-)\,.$$

Finalement, on en déduit la condition initiale cherchée,

$$u(0^+) = E\,.$$

$\boxed{4}$ Détermination de la constante :

$$u_C(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A + \frac{E}{2} \underbrace{=}_{\text{CI}} E \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{E}{2}\,.$$

$\boxed{5}$ **Conclusion :** On en déduit finalement l'expression cherchée

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

Le chronogramme est représenté figure 3.

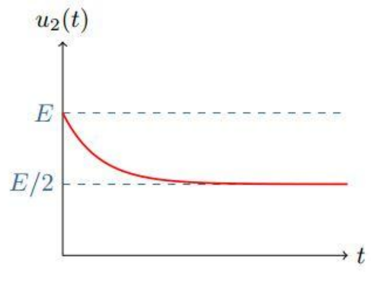
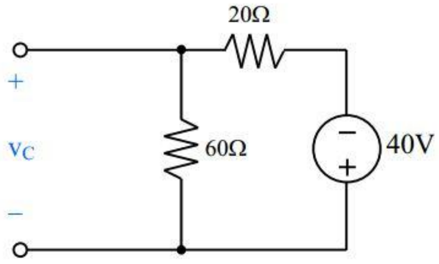


Figure 3 – Chronogramme de la tension $u(t)$.

Exercice 5 :

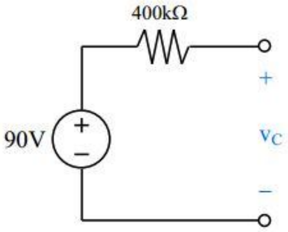
1. Pour $t < 0$, la capacitance se comporte comme un circuit ouvert. Le circuit est le suivant :



La tension à ses bornes est donc la même tension que celle aux bornes de la résistance de 60Ω.

$$v_C(0^-) = \frac{60}{20+60}(-40) = -30 \text{ V} = v_C(0^+)$$

2. La valeur finale de la tension aux bornes du condensateur est la tension de la source de 90V, puisque le condensateur se comportera comme un circuit ouvert. Le circuit à $t = \infty$ est :



ce qui donne :

$$v_C(\infty) = 90 \text{ V} = v_f$$

3. La constante de temps est :

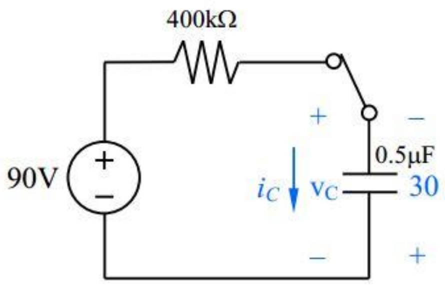
$$\tau = RC = 0.2 \text{ s}$$

4. On a toutes les données nécessaires pour obtenir l'expression de $v_C(t)$:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= v_f + [v(t_0) - v_f]e^{-t/\tau} \\ &= 90 + [-30 - 90]e^{-t/0.2} \\ &= 90 - 120e^{-5t} \text{ V}, \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

5. On va appliquer la méthode générale pour calculer $i_C(t)$: il faut $i_C(0^+)$ et $i_C(\infty)$. Le courant final $i_C(\infty)$ est facile à calculer : la capacitance, à $t = \infty$, se comporte comme un circuit ouvert, et donc le courant $i_C(\infty) = 0$.

Pour calculer $i_C(0^+)$, on calcule le courant dans la résistance (dans le circuit suivant), à $t = 0^+$. Il ne faut pas oublier que la tension initiale aux bornes du condensateur est -30V.



La tension aux bornes de la résistance est $90 - (-30) = 120$V. Le courant est donc :

$$i(0^+) = \frac{120}{400 \times 10^3} = 0.3 \text{ mA}$$

Exercice 6 :

1) En appliquant la loi des mailles :

$E = U_c + U_R$ (*)

la loi d'ohm : $U_R = Ri$

avec : $i = \frac{dq}{dt}$ et $U_c = \frac{q}{c}$

L'eq. (*) devient :

$E = \frac{q}{c} + R\frac{dq}{dt}$

donc : $\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{q}{Rc} = \frac{E}{R}}$

2) L'expression littérale de I_0.

On considère l'eq. (*) :

a $t = 0^+ \Rightarrow \begin{cases} U_c(0^+) = 0 \\ U_R = RI_0 = U_R(0^+) \end{cases}$

donc : $E = 0 + RI_0$

$\Rightarrow \boxed{I_0 = E/R}$

3) On dérive l'eq. (*) / temps :

On a : $E = \frac{q}{c} + Ri$

$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{q}{c} + Ri\right]$

$0 = \frac{1}{c}\frac{dq}{dt} + R\frac{di}{dt}$

et $i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{1}{Rc}i = 0}$

3) On a la solution de l'eq. diff s'écrit sous la forme

$i(t) = Ae^{-t/\tau}$

donc à $t = 0^+$ $i(0^+) = Ae^{0} = A$

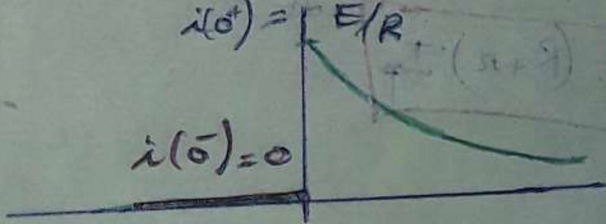
d'où : $\boxed{A = I_0}$

4) juste avant la fermeture de l'interrupteur K :

$i(0^-) = 0$ alors que $i(0^+) = E/R$

donc $i(0^+) \neq i(0^-)$

$\Rightarrow$ le courant n'est pas une fonction continue en 0.



Exercice 7 :

1) la loi des mailles :

$E = U = U_L + U_R$

la loi d'ohm : $U_R = Ri$

et $U_L = L\frac{di}{dt} + ri$

$\Rightarrow \boxed{E = L\frac{di}{dt} + (R+r)i}$

2) Dans le régime permanent graphiquement, on a :

$\boxed{i = 100\,mA = I_p}$

3) On a : $\tau = 1\,ms$: la tangente coupe l'asymptote $I_p = 100\,mA$ au point d'abscisse $t = 1\,ms = \tau$

4) Dans le cas de régime permanent $i = I_p =$ donc $\frac{di}{dt} = 0$

$\Rightarrow \boxed{E = (R+r)I_p}$

5) d'après la question 4

$E = (R+r)I_p$

$\Rightarrow \frac{E}{I_p} - R = r$

AN : $r = \frac{6}{0,1} - 50 = 10\,\Omega$

$\boxed{r = 10\,\Omega}$

d'autre part : $\tau = \frac{L}{R+r}$

$\Rightarrow L = \tau(R+r)$

AN : $L = 10^{-3}(80 - 10)$

$\Rightarrow \boxed{L = 70\,mH}$

Rq : τ a une dimension homologue à un temps. En effet :

$U_L = L\frac{di}{dt}$

$[L] = \frac{[U]}{[I]}.[t]$ et $U_R = Ri$

$\Rightarrow [R] = \frac{[U]}{[I]}$

On en déduit que :

$\tau = \frac{[L]}{[R]} = [t]$.

Exercice 8 :

Partie 1 :

1) Régime pseudopériodique.

2) La loi des mailles :

$$u_c + u_R + u_L = 0$$

avec $u_L = L\frac{di}{dt} + ri$

et $i = c\frac{du_c}{dt}$

$$\Rightarrow u_c + Rc\frac{du_c}{dt} + rc\frac{du_c}{dt} + Lc\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$$

$$Lc\frac{d^2u_c}{dt^2} + (R+r)c\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

d'où : $\boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \left(\frac{R+r}{L}\right)\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{Lc}u_c = 0}$

3) On a : $T = T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$,

graphiquement $T_0 = 10\,ms$

$$\Rightarrow LC = \frac{T_0^2}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow C = \frac{T_0^2}{4\pi^2} \times \frac{1}{L}$$

AN : $C = \frac{(10.10^{-3})^2}{4 \times 10} = 2{,}5\,\mu F$

$\Rightarrow \boxed{C = 2{,}5\,\mu F}$

Partie 2 :

1) pour entretenir les oscillations il faut que :

$$K_0 = -(R+r) = -(90+10)$$

$$\boxed{K_0 = -100\,\Omega}$$

On a : $U_G = Ki$

$$\Rightarrow [U_G] = [K].[I] = [V]$$

$[K] = \frac{[V]}{[I]}$, $\boxed{K \text{ en } (\Omega)}$

2) $I_m = 8\,mA$; $T_0 = 10\,ms$

à $t=0$; $i(0) = 0 \Rightarrow i(0) = I_m\cos(\varphi) = 0$

d'où : $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

et on a : $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} < 0$

fonction décroissante (voir la fig)

$$\frac{di}{dt} = -I_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = -I_m\frac{2\pi}{T_0}\sin(\varphi) < 0$$

$\Rightarrow$ pour $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}}$ $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} < 0$

3) $E_t = \frac{1}{2}LI_m^2$ AN : $\boxed{E_t = 3{,}2.10^{-5}\,J}$

4) On a : $E_t = E_{el} + E_m$

avec : $\begin{cases} E_m = \frac{1}{2}Li^2(t_1) \\ i(t_1) = 4{,}8\,mA \end{cases}$

$$\Rightarrow E_{el}(t_1) = E_t - E_m$$

AN : $\boxed{E_{el}(t_1) = 2{,}05\,10^{-5}\,J}$